8/12/15

Φροντιστηριακές ασκήσεις #4

Άσκηση 1.

- Το D δεν είναι υπόχωρος, γιατί $(0,0,0,0) \notin D$ αφού κάθε στοιχείο του D έχει 4^{η} συντεταγμένη ίση με 4.
- Για το B έχουμε $(\alpha, b, \alpha+2b, \alpha-7b)$ θα πρέπει

$(\alpha, b, \alpha+2b, \alpha-7b) = \alpha(1,0,1,1) + b(0,1,2,7)$

Άρα $B = \{\alpha(1,0,1,1) + b(0,1,2,7) : \alpha, b \in \mathbb{R}\} = \langle (1,0,1,1), (0,1,2,-7) \rangle$

άρα από τη θεωρία υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$.

Πιο γενικά αν $B' = \{(\lambda_1\alpha+\mu_1 b, \lambda_2\alpha+\mu_2 b, \lambda_3\alpha+\mu_3 b, \lambda_4\alpha+\mu_4 b)\}$

με $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{R}$, τότε $B' = \langle (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4), (\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4) \rangle$ άρα ο B' υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$.

- Το A είναι υπόχωρος

α' τρόπος: Δείχνουμε $0_{\mathbb{R}^4} = (0,0,0) \in A$ και ότι αν $u, v \in A$, $\lambda \in \mathbb{R}$ $u+v \in A$, $\lambda u \in A$

β' τρόπος: Χρησιμοποιούμε ότι το A περιγράφεται με σύστημα ~~ομογενών γραμμικών~~ εξισώσεων στο $x_1 \dots x_4$. Τότε έπεται A υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$.

Π.χ. $A' = \{(x_1 \dots x_4) \in \mathbb{R}^4 \,/\, 3x_1 + 8x_2 - x_3 = 0,\ 5x_2 - 7x_4 = 0\}$

Απόδειξη ότι E δεν είναι υπόχωρος...
Πράγματι $u=(1,0,0,0)$ και $v=(0,1,0,0)$ έχουμε $u,v \in E$. Αλλά
$u+v=(1,1,0,0) \notin E$ γιατί $1\cdot 1 \neq 0 \cdot 0$. Άρα E όχι υπόχωρος.

Άσκηση 4

Ψάχνουμε $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ ώστε $(1,1,1)=\lambda$

$$(1,1,1)=\lambda_1(2,4,0)+\lambda_2(1,3,-1)+\lambda_3(3,7,-1) \iff$$

$$\cancel{(1,1,1)=(2\lambda_1, \lambda_2, 3\lambda_3}$$

$$(1,1,1)=(2\lambda_1+\lambda_2+3\lambda_3, 4\lambda_1+3\lambda_2+7\lambda_3, -\lambda_2-\lambda_3) \iff$$

$$\iff \begin{cases} 2\lambda_1+\lambda_2+3\lambda_3=1 \\ 4\lambda_1+3\lambda_2+7\lambda_3=1 \quad (\Sigma) \\ -\lambda_2-\lambda_3=1 \end{cases}$$

Τα πάντα εξαρτώνται από το (Σ) έχει λύση ή όχι.

Ξέρουμε (Σ) έχει λύση $\iff$ βαθμίδα πίνακα Σ = βαθμίδα επαυξημένου πίνακα του Σ και συνεχίζουμε όπως ξέρουμε.

Ασκηση 5

Ψάχνουμε $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ με

$1+x-2x^2+3x^3 = \lambda_1(1-x)+\lambda_2(1-x^2)+\lambda_3(1-x^3) \Leftrightarrow$

$1+x-2x^2+3x^3 = (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)-\lambda_1 x-\lambda_2 x^2-\lambda_3 x^3 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1 \\ -\lambda_1=1 \\ -\lambda_2=-2 \\ -\lambda_3=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1=-1 \\ \lambda_2=2 \\ \lambda_3=-3 \\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1 \end{cases}$$

Προφανώς είναι αδύνατο.

Άρα το στοιχείο $1+x-2x^2+3x^3 \notin V$

Ασκηση 6

Ψάχνουμε $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}^3$, όχι και τα τρία μηδέν, ώστε

$\lambda_1(2,4,0)+\lambda_2(1,3,-1)+\lambda_3(3,7,-1)=0_{\mathbb{R}^3}=(0,0,0)$ (*)

Αν υπάρχουν τα διανύσματα είναι γραμμικώς εξαρτημένα

Αν δεν υπάρχουν είναι γραμμικά ανεξάρτητα

(*) $\Rightarrow (2\lambda_1+\lambda_2+3\lambda_3,\ 4\lambda_1+3\lambda_2+7\lambda_3,\ -\lambda_2-\lambda_3)=(0,0,0) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 2\lambda_1+\lambda_2+3\lambda_3=0 \\ 4\lambda_1+3\lambda_2+7\lambda_3=0 \\ -\lambda_2-\lambda_3=0 \end{cases}$$

Από τη θεωρία συστημάτων το (Σ') έχει και μη μηδενικές λύσεις αν και μόνο αν

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 7 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Έχουμε $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 7 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 4 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = 0$

Άρα τα 3 διανύσματα είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

Άσκηση 8

Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ με $\lambda_1 A + \lambda_1 B + \lambda_3 C + \lambda_4 D =$
$\Phi_{2\times2} = \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}$

Ισοδύναμα $\begin{bmatrix} \lambda_1+3\lambda_2+7\lambda_3+10\lambda_4 & \lambda_1+\lambda_3+2\lambda_4 \\ \lambda_1+\lambda_2+3\lambda_3+6\lambda_4 & -\lambda_1-2\lambda_2-5\lambda_3-6\lambda_4 \end{bmatrix} =$

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} \lambda_1+3\lambda_2+7\lambda_3+10\lambda_4=0 \\ \lambda_1+\lambda_3+2\lambda_4=0 \\ \lambda_1+\lambda_2+3\lambda_3+6\lambda_4=0 \\ -\lambda_1+2\lambda_2-5\lambda_3-6\lambda_4=0 \end{cases}$

Μετά τις πράξεις βλέπουμε ότι το σύστημα έχει και λύσεις διάφορες της μηδενικής, άρα τα A, B, C, D είναι γραμμικώς εξαρτημένα.
Εξετάζουμε με τον ίδιο τρόπο αν το σύνολο A, B, C είναι γραμμικώς ανεξάρτητο

Μετά τις πράξεις έπεται A, B, C όχι γραμ. ανεξ.
Εξετάζουμε με τον ίδιο τρόπο αν το σύστημα A, B, D γραμ. ανεξ. και πράγματι είναι.

*

Πρόταση: Έστω $V \neq \{0\}$ διαν. χώρος επί του F πεπερασμένης διάστασης μ. Τότε:

i) Αν $\rho \geq \mu+1$ και $v_1, v_2, \dots v_\rho \in V$ τότε τα $v_1 \dots v_\rho$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα

π.χ αφού $\dim \mathbb{R}_3[x] = 4$ κάθε 5 στοιχεία του $\mathbb{R}_3[x]$ είναι γραμμ. εξαρτημένα αφού $\dim \mathbb{R}^{3\times 8} = 3 \cdot 8 = 24$, κάθε 25 ή 26 ή 27 στοιχεία του $\mathbb{R}^{3\times 8}$ είναι γραμμ. εξαρτημένα αφού $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, κάθε $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, κάθε 4 ή 5 ή 6 ή ... $\mathbb{R}^3$ '' ''

* (χωρίς απόδειξη)

ii) Αν $q < \mu$ και $v_1, v_2 \dots v_q \in V$ τότε $\langle v_1, v_2, \dots v_q \rangle \neq V$

Παράδειγμα: Αφού $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, $\mathbb{R}^3 \neq \langle v_1, v_2 \rangle$ για κάθε $v_1, v_2 \in \mathbb{R}$

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ: $\dim V = \min\{k \in \mathbb{Z}$: υπάρχουν k στοιχεία $v_1, v_2 \dots v_k \in V$ με $V = \langle v_1 \dots v_k \rangle\} = \max\{k \in \mathbb{Z}$ υπάρχουν στοιχεία k $v_1 \dots v_k \in V$ γραμμ. ανεξ.$\}$

Πρόταση (χωρίς απόδειξη)

Έστω $V \neq \{0\}$ διαν. χώρος επί του F πεπερασμένης διάστασης με $v_1, v_2 \dots v_\mu \in V$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

(Προσοχή! Απαιτείται ο αριθμός των v_i να είναι ίσος με $\dim V$)

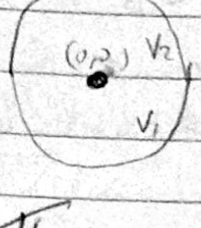
a) $v_1 \dots v_\mu$ βάση του V

b) $v_1 \dots v_\mu$ γραμμικώς ανεξάρτητα

c) $V = \langle v_1 \dots v_\mu \rangle$

Πρόταση: Έστω $V \neq \{0\}$ διαν. χώρος επί του F πεπερασμένης διάστασης μ.
Κάθε γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του V έχει $\leq \mu$ στοιχεία και επεκτείνεται σε βάση του V. (Θα δούμε και αλγόριθμο)

Παράδειγμα $\mathbb{R}^2$



Πρόταση (χωρίς απόδειξη)
Έστω $V \neq \{0\}$ διαν. χώρος διάστασης μ και $v_1 \dots v_p \in V$ με $V = \langle v_1 \dots v_p \rangle$. Τότε $p \geq \mu$ και αν $p = \mu$ τα $v_1 \dots v_p$ είναι βάση, αν $p > \mu$ αφαιρώντας $p-\mu$ από το v, παίρνουμε βάση V.
Με άλλα λόγια αν τα $v_1 \dots v_p$ παράγουν το V (δηλ. $V = \langle v_1 \dots v_p \rangle$) τότε υπάρχει υποσύνολό τους που είναι βάση του V.

Πρόταση (χωρίς απόδειξη)
Έστω V διαν. χώρος$/F$, $\dim V = \mu$ πεπερασμένη και $A, S \subseteq V$ με $\emptyset \neq A \subseteq S$ ώστε A γραμμικώς ανεξάρτητο και $V = \langle S \rangle$. Τότε υπάρχει βάση $v_1 \dots v_\mu$ του V με $A \subseteq \{v_1 \dots v_\mu\} \subseteq S$

Πρόταση (για υπολογισμούς)
Έστω $V \neq \{0\}$ διαν. χώρος επί του F πεπερασμένης διάστασης μ και $l_1, l_2, l_3 \ldots l_\mu$ μια βάση του V.
Έστω $w_1 \ldots w_\nu \in V$ με $w_i = \alpha_{i1} l_1 + \alpha_{i2} l_2 + \alpha_{i3} l_3 + \ldots + \alpha_{i\mu} l_\mu$ για $i = 1, 2 \ldots \nu$ και $\alpha_{ij} \in F$.
Θεωρούμε τον $\nu \times \mu$ πίνακα $A = [\alpha_{ij}] \in F^{\nu \times \mu}$. Τότε:
α) $w_1 \ldots w_\nu$ γραμμικώς ανεξάρτητα $\Leftrightarrow$ βαθμίδα$(A) = \nu$
β) $V = \langle w_1 \ldots w_\nu \rangle \Leftrightarrow$ βαθμίδα$(A) = \mu$
γ) $w_1 \ldots w_\nu$ βάση του $V \Leftrightarrow (\nu = \mu)$ και (βαθμίδα$(A) = \nu$)

Πόρισμα (για το δ.χ. F^μ).
Έστω $w_1 = (\alpha_{11}, \alpha_{12} \ldots \alpha_{1\mu})$, $w_2 = (\alpha_{21}, \alpha_{22}, \ldots \alpha_{2\mu})$
$w_\nu = (\alpha_{\nu 1}, \alpha_{\nu 2}, \ldots, \alpha_{\nu\mu})$ ν το πλήθος στοιχεία του F^μ.
Θέτουμε

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1\mu} \\ \alpha_{21} & \ldots & \alpha_{2\mu} \\ \vdots & & \\ \alpha_{\nu 1} & \ldots & \alpha_{\nu\mu} \end{bmatrix} \in F^{\nu \times \mu}$$

Ισχύουν τα α, β, γ.
Απόδειξη
Άμεσα από την προηγούμενη πρόταση, χρησιμοποιώντας την "κανονική" βάση $l_1 = (1, 0 \ldots 0)$, $l_2 = (0, 1, 0 \ldots 0), \ldots, \ldots l_\mu = (0, \ldots 0, 1)$ του F^μ

Παράδειγμα
Για το $\mathbb{R}^2$. Έστω $v_1 = (\alpha, b)$, $v_2 = (c, d)$. Τότε v_1, v_2 βάση του $\mathbb{R}^2 \Leftrightarrow v_1, v_2$ γραμμ. ανεξ. $\Leftrightarrow v_1, v_2$ παράγουν το $\mathbb{R}^2 \Leftrightarrow \det \begin{bmatrix} \alpha & b \\ c & d \end{bmatrix} \neq 0$

Για το $\mathbb{R}^3$: Έστω $v_1 = (\alpha, b, c)$, $v_2 = (d, e, f)$, $v_3 = (g, h, i) \in \mathbb{R}^3$

Τότε v_1, v_2 γραμμ. ανεξ. $\Leftrightarrow$ βαθμίδα $\begin{bmatrix} \alpha & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = 2$

v_1, v_3 γραμμ. ανεξ. $\Leftrightarrow$ βαθμίδα $\begin{bmatrix} \alpha & b & c \\ g & h & i \end{bmatrix} = 2$

V_1, V_3 γραμμ. ανεξ $\Leftrightarrow$ βαθμίδα $\begin{bmatrix} d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = 2$

Επίσης v_1, v_2, v_3 βάση του $\mathbb{R}^3 \Leftrightarrow v_1, v_2, v_3$ γραμμ. ανεξ. $\Leftrightarrow \mathbb{R}^2 = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle \Leftrightarrow$

βαθμίδα $\begin{bmatrix} \alpha & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = 3 \Leftrightarrow \det \begin{bmatrix} \alpha & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \neq 0$

(Για ίδια ισχύουν και για το F^3, για σώμα F)

Για το $\mathbb{R}^3$.

Έστω, $V = (\alpha, b, c)$, $V_2 = (d, e, f)$, $V_3 = (g, h, i) \in \mathbb{R}^3$